

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen  
Lehrstuhl für Informatik 1  
Dr. W. Unger

Proseminar Graphenalgorithmien im SS 2007

**Satz von Menger**  
Markus Arndt (265555)

4. Januar 2008

## **Abstract**

Diese Ausarbeitung beschäftigt sich mit dem Satz von Menger (nach Karl Menger), welcher besagt dass eine größtmögliche Menge disjunkter Wege in einem Graphen gleich groß ist wie eine kleinstmögliche Menge trennender Ecken in demselben.

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Überblick</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Definitionen</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Satz von Menger</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Max-Flow-Min-Cut Theorem</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>11</b>

# 1 Überblick

Zunächst werden im zweiten Kapitel einige grundlegende Definitionen der Graphentheorie betrachtet, welche für die folgende nötig sind. Im dritten Kapitel folgt der Satz von Menger, begleitet von einem zweiteiligen Induktionsbeweis. Anschließend legt Kapitel vier eine Verallgemeinerung des Satzes dar, das Max-Flow-Min-Cut Theorem. Es erweitert den Satz von Menger von Graphen auf Netzwerke. Die Literaturverweise befinden sich in Kapitel fünf.

## 2 Definitionen

### Definition (trennende Knotenmenge (Trenner))

Sei  $G = (E, V)$  ein Graph und  $A, B \subseteq V$  Teilmengen von Knoten. Dann ist  $T \subseteq V$  eine *trennende Knotenmenge* falls  $A$  und  $B$  in  $G' = (E, V \setminus T)$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen. Man nennt einen solchen Trenner *minimal*, wenn es nicht möglich ist einen Knoten zu entfernen und gleichzeitig die Trenneigenschaft zu erhalten.

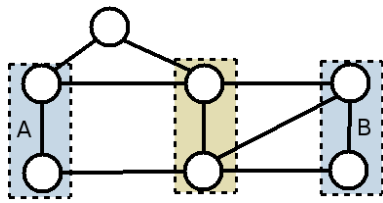


Abbildung 1:  $G = (E, V)$

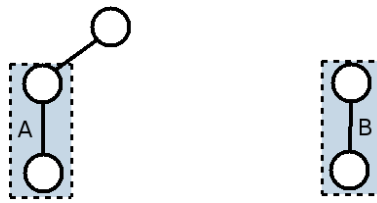


Abbildung 2:  $G' = (E, V \setminus T)$

### Definition (knotendisjunkte Wege)

Seien  $w_1 = (e_1, e_2), \dots, (e_{n-1}, e_n)$  und  $w_2 = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2), \dots, (\tilde{e}_{m-1}, \tilde{e}_m)$  zwei Wege. Man nennt  $w_1$  und  $w_2$  *knotendisjunkt* falls:

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq m : e_i \neq \tilde{e}_j$$

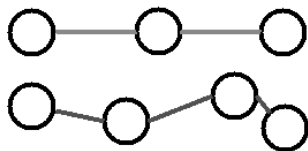


Abbildung 3: knotendisjunkt

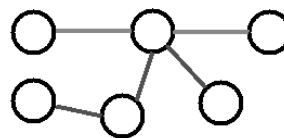


Abbildung 4: nicht knotendisjunkt

### 3 Satz von Menger

#### Satz

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $A, B \subseteq V$ . Dann ist die Mächtigkeit eines minimalen Trenners von  $A$  und  $B$  gleich der maximalen Anzahl knotendisjunkter Wege zwischen  $A$  und  $B$ .

#### Beweis

Der Beweis wird für einen minimalen Trenner  $T$  und eine maximale Menge knotendisjunkter Wege  $W$  in zwei Richtungen geführt, d.h. es wird zunächst  $|W| \leq |T|$  und anschließend  $|W| \geq |T|$  bewiesen.

#### Zeige ( $|W| \leq |T|$ )

Sei  $G = (V, E)$  Graph mit  $A, B \subseteq V$ ,  $T$  ein minimaler A-B-Trenner und  $W$  eine maximale Menge knotendisjunkter A-B-Wege in Graph  $G$ .

$\Rightarrow$  Jeder A-B-Weg aus  $W$  benutzt ein  $t \in T$ , da  $T$  die Mengen  $A$  und  $B$  trennt.

$\Rightarrow |W| \leq |T|$ , da sonst zumindest zwei unterschiedliche Wege einen gemeinsamen Knoten  $t \in T$  benutzen müssten. Nach Voraussetzung sind alle Wege in  $W$  aber knotendisjunkt.

**Zeige ( $|W| \geq |T|$ )**

Diese Beweisrichtung wird durch Induktion über die summierte Länge der disjunkten Wege gezeigt.

**Induktionsvoraussetzung:**

Sei  $G = (V, E)$  Graph mit  $A, B, T \subseteq V$ ,  $T$  ein minimaler A-B-Trenner und  $S$  eine *nicht maximale* Menge knotendisjunkter A-B-Wege in Graph  $G$  mit  $|S| < |T|$ .

**Induktionsbehauptung:**

Es existiert ein weiterer A-B-Weg  $w' \notin S$ , welcher disjunkt zu allen  $w \in S$  ist.

**Induktionsanfang: Die summierte Länge von S beträgt 0.**

Die summierte Länge beträgt 0.  $\Rightarrow$  Jeder Weg  $w \in S$  hat die Länge 0.

$\Rightarrow$  Jeder A-B-Weg aus  $S$  besteht aus genau *einem einzigen* Knoten aus  $A \cap B$ , da er einerseits A und B verbinden muss, andererseits die Länge 0 hat.

Entfernt man nun also ganz  $S$  so hat man  $|S|$  Knoten entfernt.  $\Rightarrow$  Da  $|S| < |T|$  und  $T$  minimaler Trenner gilt: Im Restgraphen ex. noch ein A-B-Weg.

$\Rightarrow$  Es ex. ein weiterer A-B-Weg der disjunkt zu den Wegen aus  $S$  ist.

**Induktionsschritt: Die summierte Länge ist größer 0**

Sei  $B_s \subset B$  die Menge der Endknoten der Wege aus  $S$ , welche in  $B$  enden.  $\Rightarrow |B_s| = |S| \Rightarrow B_s$  ist kein A-B-Trenner (da  $|B_s| = |S| < |T|$  und  $T$  minimal).

$\Rightarrow$  Es ex. ein weiterer Weg  $r$  von  $A$  nach  $B \setminus B_s$ .

**Fall 1:**  $r$  ist disjunkt zu allen Wegen in  $S$ .

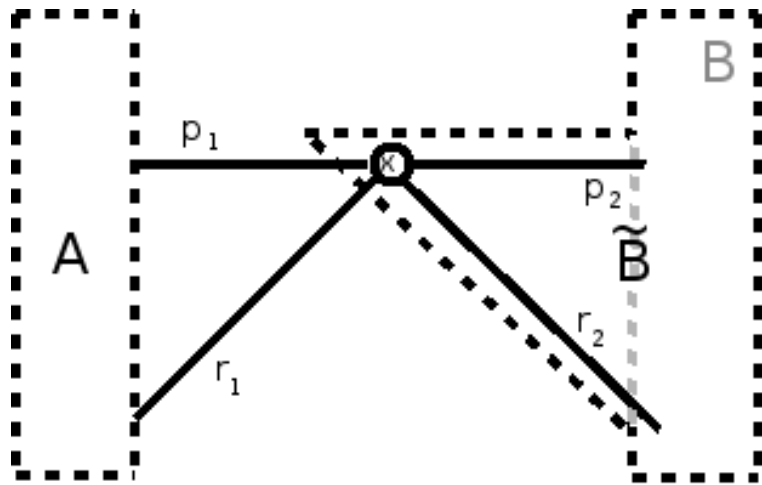
Da  $r$  disjunkt zu allen Wegen in  $S$  ist wurde ein weiterer A-B-Weg gefunden.

**Fall 2:**  $r$  schneidet einen Weg  $p \in S$ .

Sei  $x$  der letzte gemeinsame Knoten von  $p$  und  $r$ .

Man definiere folgende Hilfsobjekte:

- Sei  $r_1$  der Teilweg von  $r$  (beginnend in  $A$ ) bis inklusive  $x$
- Sei  $p_1$  der Teilweg von  $p$  (beginnend in  $A$ ) bis inklusive  $x$
- Sei  $r_2$  der restlichen Teilweg von  $r$
- Sei  $p_2$  der restlichen Teilweg von  $p$
- $\tilde{B} := B \cup \{x\} \cup \{r_2\} \cup \{p_2\}$
- $\tilde{S} := S \setminus \{p\} \cup \{p_1\}$



Offensichtlich verbindet  $\tilde{S}$  die Mengen  $A$  und  $\tilde{B}$  knotendisjunkt und hat eine kürzere Gesamtlänge als  $S$ . Somit greift die Induktionsvoraussetzung.

Es ex. ein weiterer knotendisjunkter Weg  $y$  (nicht mit  $r$  zu verwechseln) von  $A$  nach  $\tilde{B} = B \cup \{r_2\} \cup \{p_2\}$ .

**Fall 2.1:**  $y$  endet in  $B$ .

Der Weg  $y$  ist knotendisjunkt zu  $\tilde{S}$ , somit auch zu  $S$ , da er nicht auf  $p_2$  endet. Es wurde ein weiterer zu  $S$  disjunkter A-B-Weg gefunden.

**Fall 2.3:**  $y$  endet in  $\tilde{B} \setminus B$ , genauer auf  $p_2$ .

Wir verlängern  $r_1$  um  $r_2$  und verlängern  $y$  um  $p_2$  ( $p_2$  und  $r_2$  waren disjunkt weil  $x$  der letzte Schnittpunkt war). Somit haben wir nun  $|S| + 1$  disjunkte Wege von A nach B.

**Fall 2.3:**  $y$  endet in  $\tilde{B} \setminus B$ , genauer auf  $r_2$ .

Wir verlängern  $p_1$  wieder um  $p_2$  und verlängern  $y$  um  $r_2$  ( $p_2$  und  $r_2$  waren disjunkt weil  $x$  der letzte Schnittpunkt war). Somit haben wir nun  $|S| + 1$  disjunkte Wege von A nach B.

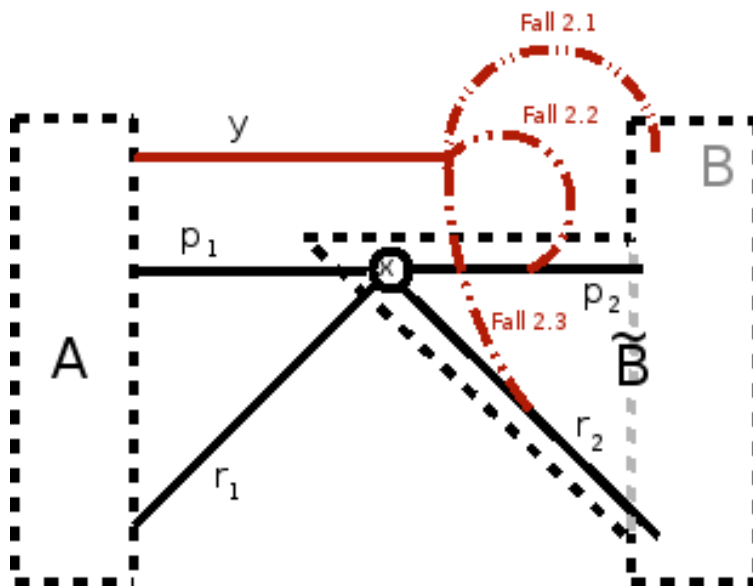


Abbildung 5: Beispiel zum besseren Verständnis

Da also immer ein weiterer disjunkter Weg existiert, solange  $|S| < |T|$  muss für eine maximale Menge  $W$  knotendisjunkter Wege  $|W| \geq |T|$  gelten.

□

## 4 Max-Flow-Min-Cut Theorem

Die Erweiterung des Satzes von Menger auf Netzwerke (gewichteter Digraph ohne Mehrfachkanten) nennt sich das *Min-Cut-Max-Flow Theorem* und wurde 1956 unabhängig von mehreren Mathematikern entdeckt.

Dieses Theorem sagt nun aus, dass die Kapazität eines minimalen Schnittes (minimale Summe über Kantenkapazitäten welche zusammen "Kantentrenner" von Quelle A und Senke B sind) gleich dem Wert eines maximalen Flusses (Anschaulich: der maximale "Durchsatz" von Quelle A zur Senke B) in diesem Netzwerk ist.

## 5 Literaturverzeichnis

**Johann Wolfgang Goethe-Universität,**  
Vorlesung "Graphen, Algorithmen und Modelle" (SS 2007).  
<http://www.thi.informatik.uni-frankfurt.de/%7Eweinard/graphen07.html>

**Wikipedia (de)**  
[http://de.wikipedia.org/wiki/F1%C3%BCsse\\_und\\_Schnitte\\_in\\_Netzwerken](http://de.wikipedia.org/wiki/F1%C3%BCsse_und_Schnitte_in_Netzwerken)

**Wikipedia (en)**  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Max\\_flow\\_min\\_cut\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Max_flow_min_cut_theorem)